Base e dimensão

Laura Goulart

UESB

14 de Agosto de 2018

Base de Espaços Vetoriais

Seja V um e.v.r. e considere $B \subset V$ não vazio. Dizemos que B é uma base de V quando $[B] = V$ e B é li.

Base de Espaços Vetoriais

Seja V um e.v.r. e considere $B \subset V$ não vazio. Dizemos que B é uma base de V quando $[B] = V$ e B é li.
Em outras palavras, todo vetor $v \in V$ pode ser escrito, de maneira única, como combinação linear de vetores de B.

Exemplos

1) Os vetores $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ para $i = 1, \ldots, n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$

Exemplos

1) Os vetores $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ para $i = 1, \ldots, n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$ chamada **base canônica** do $\mathbb{R}^n$.

Exemplos

1) Os vetores $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ para $i = 1, \ldots, n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$ chamada **base canônica** do $\mathbb{R}^n$.

2) As matrizes $E_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ na posição } ij \\ 0, \text{ nas demais posições} \end{cases}$ formam uma base para $M_{n \times m}(\mathbb{R})$

Exemplos

1) Os vetores $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ para $i = 1, \ldots, n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$ chamada **base canônica** do $\mathbb{R}^n$.

2) As matrizes $E_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ na posição } ij \\ 0, \text{ nas demais posições} \end{cases}$ formam uma base para $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ chamada **base canônica** de $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Exemplos

1) Os vetores $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ para $i = 1, \dots, n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$ chamada **base canônica** do $\mathbb{R}^n$.
2) As matrizes $E_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ na posição } ij \\ 0, \text{ nas demais posições} \end{cases}$ formam uma base para $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ chamada **base canônica** de $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.
3) Os polinômios $1, t, t^2 \dots, t^n$ formam uma base para $P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

1) Os vetores $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ para $i = 1, \ldots, n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$ chamada **base canônica** do $\mathbb{R}^n$.
2) As matrizes $E_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{na posição } ij \\ 0, & \text{nas demais posições} \end{cases}$ formam uma base para $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ chamada **base canônica** de $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.
3) Os polinômios $1, t, t^2 \ldots, t^n$ formam uma base para $P_n(\mathbb{R})$ chamada **base canônica** de $P_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

1) Os vetores $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ para $i = 1, \ldots, n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$ chamada **base canônica** do $\mathbb{R}^n$.
2) As matrizes $E_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ na posição } ij \\ 0, \text{ nas demais posições} \end{cases}$ formam uma base para $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ chamada **base canônica** de $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.
3) Os polinômios $1, t, t^2 \ldots, t^n$ formam uma base para $P_n(\mathbb{R})$ chamada **base canônica** de $P_n(\mathbb{R})$.
4) Os polinômios $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ formam uma base para $P(\mathbb{R})$.

Exemplos

1) Os vetores $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ para $i = 1, \ldots, n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$ chamada **base canônica** do $\mathbb{R}^n$.
2) As matrizes $E_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ na posição } ij \\ 0, \text{ nas demais posições} \end{cases}$ formam uma base para $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ chamada **base canônica** de $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.
3) Os polinômios $1, t, t^2 \ldots, t^n$ formam uma base para $P_n(\mathbb{R})$ chamada **base canônica** de $P_n(\mathbb{R})$.
4) Os polinômios $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ formam uma base para $P(\mathbb{R})$.
5) $B = \{(-1, 1, 1); (1, -1, 1); (1, 1, -1)\}$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

Proposições

Proposição (1)

Todo espaço finitamente gerado admite uma base.

Proposições

Proposição (1)

Todo espaço finitamente gerado admite uma base.

Observação

A base é o conjunto com o número máximo de vetores li.

Proposições

Proposição (1)

Todo espaço finitamente gerado admite uma base.

Observação

A base é o conjunto com o número máximo de vetores li.

Proposição (2)

Seja V um e.v.r. finitamente gerado e considere $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V. Se $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é li, então $m \leq n$.

Proposição (1)

Todo espaço finitamente gerado admite uma base.

Observação

A base é o conjunto com o número máximo de vetores li.

Proposição (2)

Seja V um e.v.r. finitamente gerado e considere $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V. Se $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é li, então $m \leq n$.

Demonstração por indução sobre n.

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Exemplo 1) $dim\mathbb{R}^n =$

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Exemplo 1) $dim\mathbb{R}^n = n$

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Exemplo 1) $dim\mathbb{R}^n = n$

Exemplo 2) $dimM_{n\times m}(\mathbb{R}) =$

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Exemplo 1) $dim\mathbb{R}^n = n$

Exemplo 2) $dimM_{n\times m}(\mathbb{R}) = n \cdot m.$

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Exemplo 1) $dim\mathbb{R}^n = n$

Exemplo 2) $dimM_{n\times m}(\mathbb{R}) = n \cdot m.$

Exemplo 3) $dimP_n(\mathbb{R}) =$

Dimensão de Espaços Vetoriais

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Exemplo 1) $dim\mathbb{R}^n = n$

Exemplo 2) $dimM_{n\times m}(\mathbb{R}) = n \cdot m.$

Exemplo 3) $dimP_n(\mathbb{R}) = n + 1.$

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Exemplo 1) $dim\mathbb{R}^n = n$

Exemplo 2) $dimM_{n\times m}(\mathbb{R}) = n \cdot m.$

Exemplo 3) $dimP_n(\mathbb{R}) = n + 1.$

Exemplo 4) $dimP(\mathbb{R}) =$

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Exemplo 1) $dim\mathbb{R}^n = n$

Exemplo 2) $dimM_{n\times m}(\mathbb{R}) = n \cdot m.$

Exemplo 3) $dimP_n(\mathbb{R}) = n + 1.$

Exemplo 4) $dimP(\mathbb{R}) = +\infty.$

Corolário (2.1-Teorema da Invariância)

Duas bases de um espaço finitamente gerado tem a mesma cardinalidade.

A dimensão de um e.v.r. V é a cardinalidade de uma base de V e denota-se por $dimV$.

Exemplo 1) $dim\mathbb{R}^n = n$

Exemplo 2) $dimM_{n\times m}(\mathbb{R}) = n \cdot m.$

Exemplo 3) $dimP_n(\mathbb{R}) = n + 1.$

Exemplo 4) $dimP(\mathbb{R}) = +\infty.$

Dizemos que V tem dimensão finita quando $dimV = n < +\infty.$

Proposição (3)

Seja V um e.v.r. com $dimV = n < +\infty$. *Considere* $B = \{v_1, \ldots, v_n \subset V$. *Então:*

$$[B] = V \Leftrightarrow B \text{ é } li$$

Proposição (3)

Seja V *um e.v.r. com* $\dim V = n < +\infty$. *Considere* $B = \{v_1, \ldots, v_n \subset V$. *Então:*

$$[B] = V \Leftrightarrow B \text{ é li}$$

Exemplo

Mostre que $B = \{-t^2 + 2t + 3, -t^2 + 3t + 4, t^2 + 3t\}$ *forma uma base de* $P_2(\mathbb{R})$.

Teorema do Completamento

Seja V um e.v.r. com $dimV = n < +\infty$. Considere $B = \{u_1, \dots, u_r \subset V$ um conjunto li com $r < n$. Então, existem $u_{r+1}, \dots, u_n \in V$ tal que $C = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ é uma base de V.

Teorema do Completamento

Seja V um e.v.r. com $dimV = n < +\infty$. Considere $B = \{u_1, \ldots, u_r \subset V$ um conjunto li com $r < n$. Então, existem $u_{r+1}, \ldots, u_n \in V$ tal que $C = \{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ é uma base de V.

Exemplo

Determine uma base do $\mathbb{R}^3$ que contenha os vetores
$u_1 = (-1, 2, 1); u_2 = (1, 1, -2)$.

Base e dimensão de subespaços

Proposição (4)

Seja V um e.v.r. com $\dim V = n < +\infty$. Considere $W \subset V$ um subespaço de V. Então, W possue uma base e a $\dim W \leq n$.

Base e dimensão de subespaços

Proposição (4)

Seja V um e.v.r. com $\dim V = n < +\infty$. Considere $W \subset V$ um subespaço de V. Então, W possue uma base e a $\dim W \leq n$.

Corolário (4.1)

$$\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V.$$

Exemplos

1) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\}$

Exemplos

1) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\}$
2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \text{ e } y - 3z = 0\}$

Exemplos

1) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\}$
2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \text{ e } y - 3z = 0\}$
3) $W = \{A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) / a_{13} = a_{12} - a_{23}\}$

Exemplos

1) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\}$
2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \text{ e } y - 3z = 0\}$
3) $W = \{A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) / a_{13} = a_{12} - a_{23}\}$
4) $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) / A \text{ é anti-simétrica } \}$

Exemplos

1) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\}$
2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \text{ e } y - 3z = 0\}$
3) $W = \{A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) / a_{13} = a_{12} - a_{23}\}$
4) $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) / A \text{ é anti-simétrica }\}$
5) $W = \{at^2 + bt + c \in P_2(\mathbb{R}) / c = 2a - 3b\}$